FISICA

ElettroMagnetismo

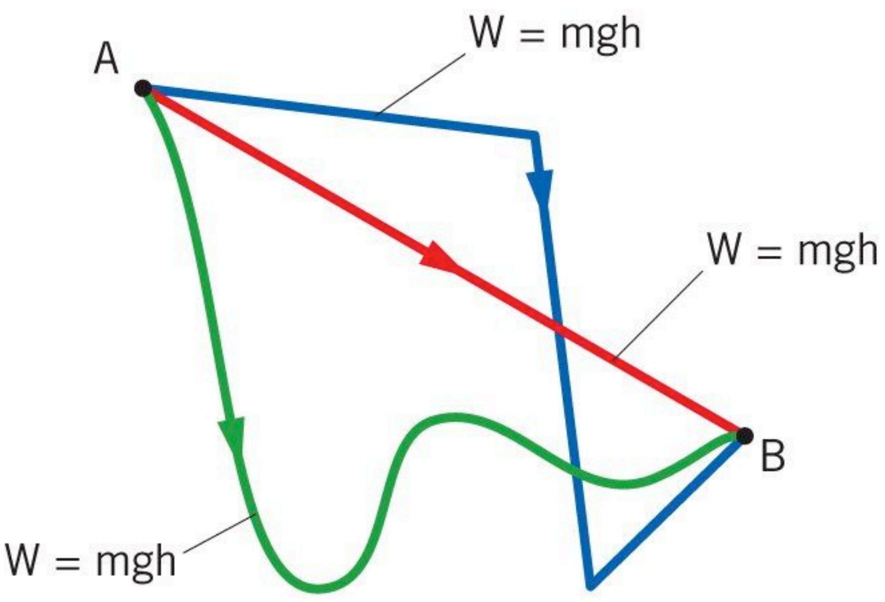
IL POTENZIALE ELETTRICO

Autore: prof. ***Pappalardo Vincenzo***

docente di **Matematica e Fisica**

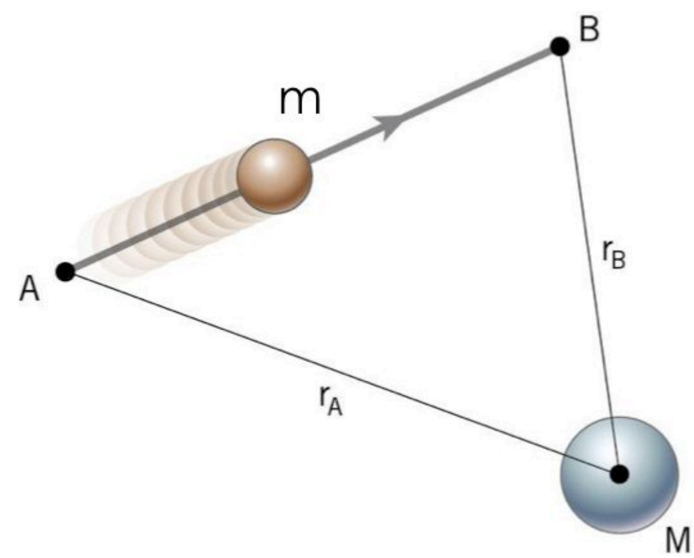
ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA

L'energia potenziale può essere introdotta per tutte le forze conservative.



Una forza si dice conservativa se il lavoro che essa fa su un corpo, nel spostarlo da un punto A a un punto B, dipende soltanto dagli estremi A e B, ma non dal particolare percorso seguito durante lo spostamento.

Consideriamo un sistema fisico, per esempio una massa m che si sposta da A a B mentre subisce la forza gravitazionale (conservativa) **F** dovuta alla massa M. La variazione di energia potenziale subita dalla massa m è definita come:



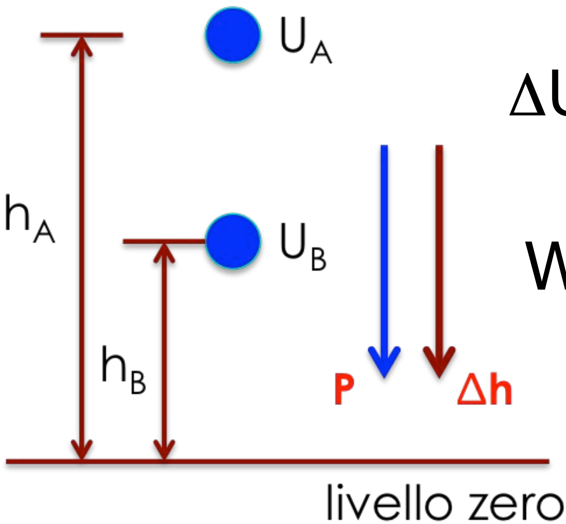
La variazione di energia potenziale $\Delta U = U_B - U_A$ è definita come l'opposto del lavoro fatto dalla forza **F** durante il passaggio dalla posizione A alla posizione B:

variazione di energia potenziale (J)

$$\Delta U = -W_{A \to B}$$

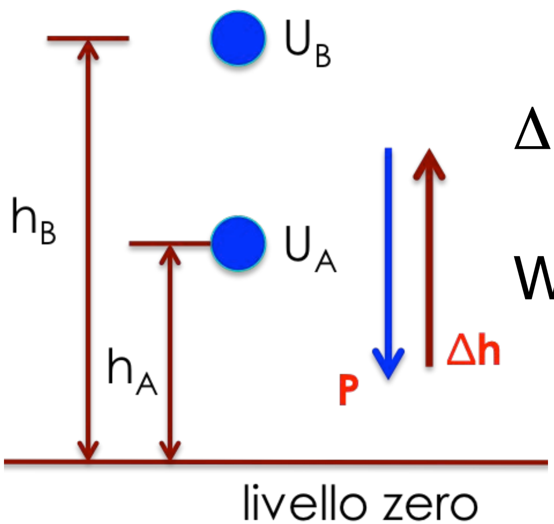
lavoro compiuto dalla forza conservativa (J)

Infatti, consideriamo le seguenti situazioni:



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B<h_A} \Delta U < 0$$

$$W_{A\to B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 0° \xrightarrow{\cos 0°=1} W_{A\to B} > 0$$



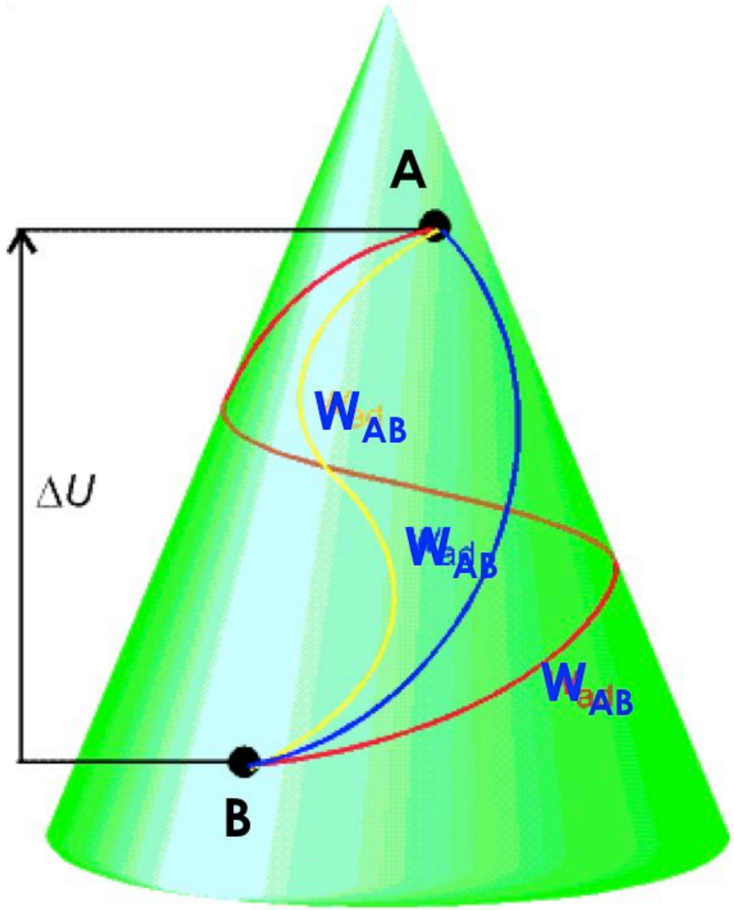
$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B<h_A} \Delta U > 0$$

$$W_{A\to B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 180° \xrightarrow{\cos 180°=-1} W_{A\to B} < 0$$

In entrambi i casi: $\boxed{\Delta U = -\ W_{A\to B}}$

Generalizzando, l’energia potenziale fa parte delle cosiddette **funzioni di stato.**

Una ***FUNZIONE DI STATO*** è una grandezza fisica dipendente soltanto dalle variabili (la posizione nel nostro caso) che servono per descrivere gli stati A e B del sistema fisico, e non dal processo (la traiettoria nel nostro caso) attraverso il quale il sistema passa da A a B.



$$\Delta U = U_B - U_A$$

Conclusione: il *campo gravitazionale è un* <u>*campo conservativo*</u>, ed è possibile introdurre l'energia potenziale gravitazionale:

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

energia potenziale gravitazionale (J)

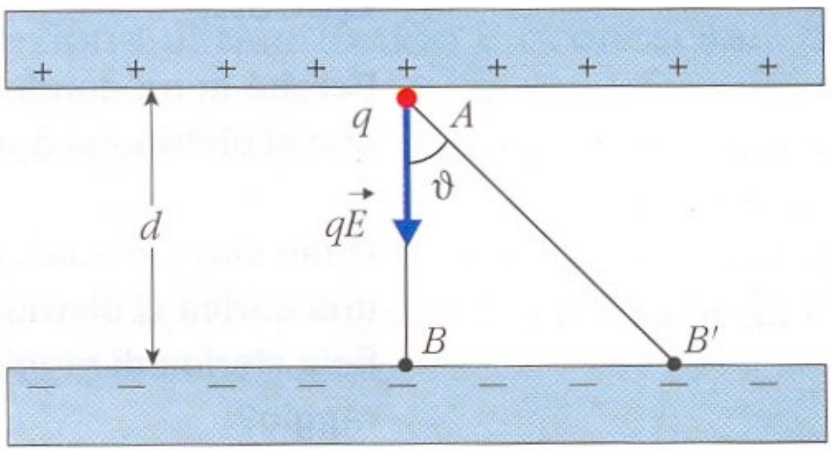
costante G ($N \cdot m^2/kg^2$)

massa del primo corpo (kg)

massa del secondo corpo (kg)

distanza (m)

Per stabilire se il campo elettrico gode delle stesse proprietà, iniziamo con lo studio del lavoro elettrico.

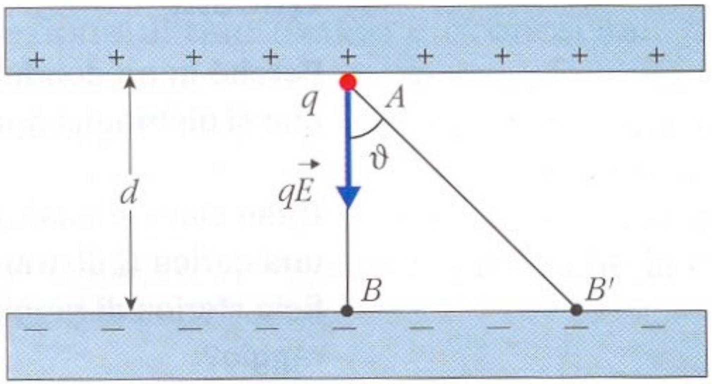


Consideriamo il campo elettrico uniforme di un condensatore piano e supponiamo che una carica *q* positiva si sposti dalla piastra positiva alla piastra negativa.

Se la carica viene abbandonata da ferma nel punto *A*, sotto l'azione della forza elettrica costante si sposta lungo la linea di forza *AB*. Se *d* è la distanza fra le piastre, il lavoro della forza elettrica è:

$$\boxed{(1)\quad L = \vec{F} \bullet \vec{d} = qEd}$$

formalmente identica a: $L = Fh = mgh$



E' facile verificare che il lavoro del campo elettrico del condensatore espresso dalla (1) è lo stesso qualunque sia il cammino AB che congiunge le due piastre.

Infatti, se la carica segue il percorso AB'B, il lavoro eseguito su di essa durante il tratto da A a B' è:

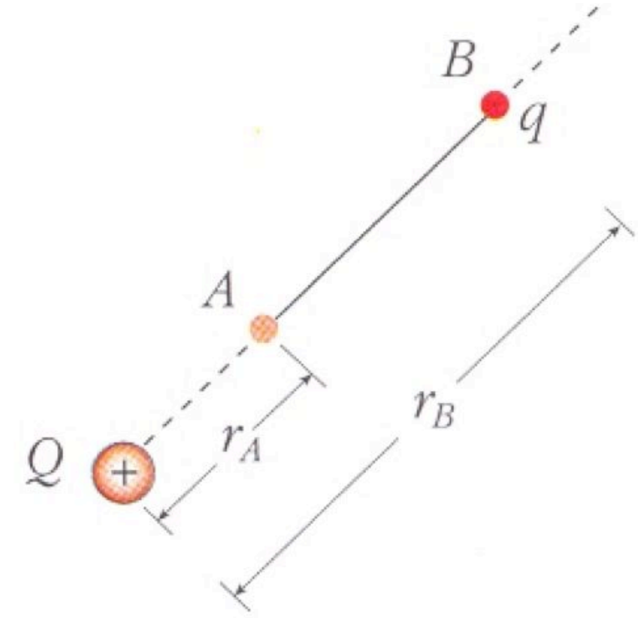
$$L = qE\overline{AB'}\cos\vartheta$$

Il lavoro da B' a B è invece nullo L=0, essendo forza e spostamento perpendicolari ($\cos 90° = 0$).

Poiché: $AB' = d/\cos\vartheta \rightarrow L' = L$

Il lavoro è indipendente dalla traiettoria seguita e quindi il campo elettrico prodotto da un condensatore è un **campo conservativo.**

Il calcolo del lavoro si complica quando prendiamo in esame un campo elettrico non uniforme nello spazio, come quello generato da una carica puntiforme Q.



Si dimostra, comunque, che se una carica di prova q si sposta da A a B, il lavoro compiuto dalla forza 8conservativa) del campo elettrico generato da Q sulla carica di prova q è dato da:

$$\boxed{L = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

Le cariche elettriche devono essere assunte con il loro segno.

Il lavoro compiuto dalla forza del campo elettrico sulla carica di prova è indipendente dalla traiettoria seguita per unire i punti A e B, quindi il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme è un **campo conservativo.**

Ma questa proprietà è generale, poiché ogni distribuzione di carica è formata da un insieme di cariche elementari assimilabili a cariche puntiformi, ciascuna delle quali produce singolarmente un campo conservativo.

Grazie al principio di sovrapposizione possiamo affermare in generale che:

> Il campo elettrico di una qualsiasi distribuzione di carica è un *campo conservativo.*

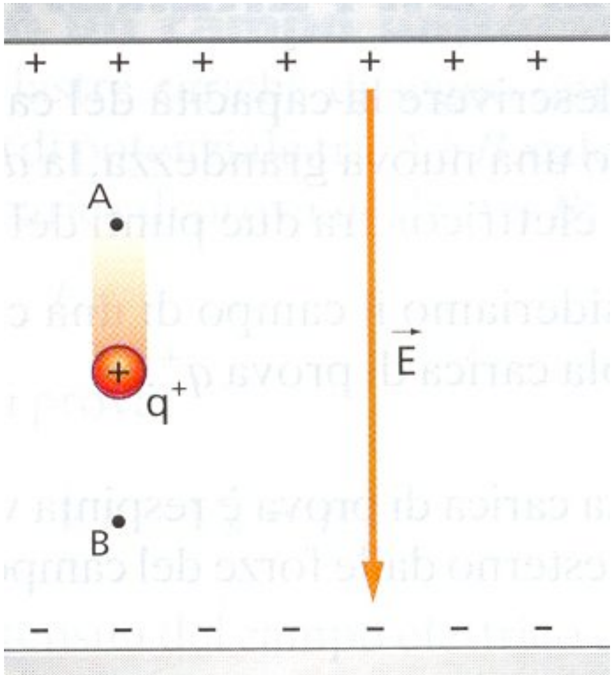
Essendo il campo elettrico conservativo, al pari di quello gravitazionale, è possibile introdurre una grandezza fisica U, chiamata **energia potenziale elettrica della carica q**:

ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA

E' una funzione delle coordinate posizionali, tale che la differenza $U_A - U_B$ dei valori che essa assume in due punti *A* e *B* dello spazio esprime il lavoro *L* compiuto dalla forza del campo elettrico quando una carica di prova *q* si sposta da *A* a *B* lungo un qualsiasi percorso:

$$\Delta U = U_A - U_B = -L$$

L'espressione analitica dell'energia potenziale dipende dalla particolare forma del campo elettrico.

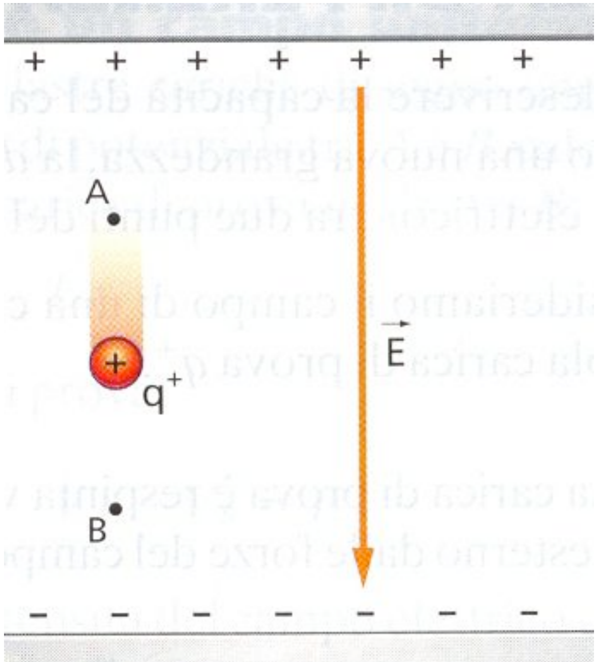


Energia potenziale nel campo elettrico generato da un condensatore

L'energia potenziale elettrica di una carica di prova q in un punto a distanza x dalla piastra negativa è:

$$\boxed{U = qEx}$$

Se una carica positiva q si sposta da A sulla piastra positiva a B sulla piastra negativa, il campo elettrico compie un lavoro positivo (L=qEx) e l'energia potenziale elettrica diminuisce della stessa quantità ($\Delta U = -L$).

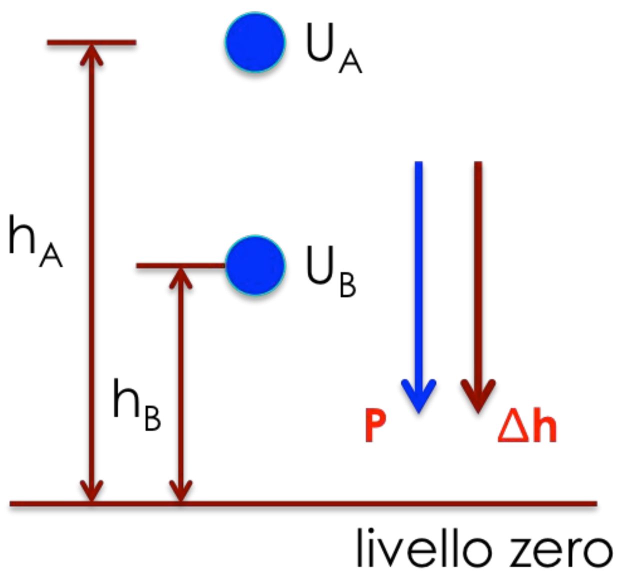


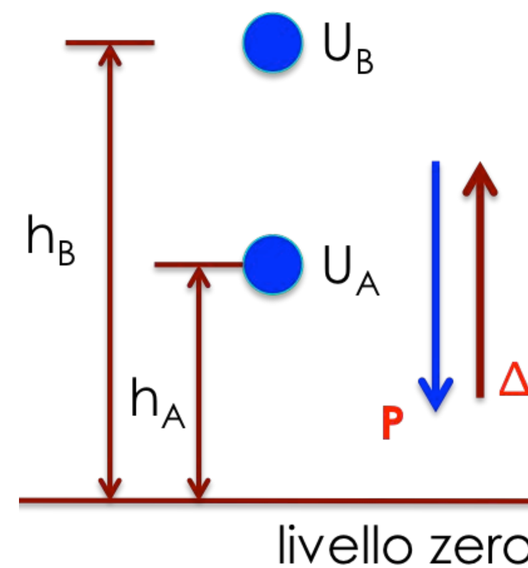
Viceversa, per portare una carica positiva dalla piastra negativa alla piastra positiva, è necessario compiere un lavoro (negativo) contro la forza del campo e l'energia potenziale elettrica aumenta di una quantità pari al lavoro speso.

La carica q^+, quando è in A, ha un'energia potenziale elettrica maggiore che in B, per cui questa energia potenziale si può trasformare in cinetica.

Per una carica negativa avviene il contrario: è necessario compiere un lavoro dall'esterno per portarla dalla piastra positiva alla piastra negativa.

E' la stessa situazione di una massa m che cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre da A a B (l'energia potenziale diminuisce), oppure viene portata da B ad A (l'energia potenziale aumenta), compiendo un lavoro contro la forza del campo.





$$\boxed{\Delta U = -\ W_{A \to B}}$$

L'energia potenziale nel campo elettrico non uniforme nello spazio, come quello generato da una carica puntiforme Q, è data da:

Energia potenziale nel campo elettrico generato da una carica puntiforme

L'energia potenziale elettrica di una carica di prova *q* in un punto a distanza *r* dalla carica Q che genera il campo è:

$$\boxed{U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}}$$

ed esprime il lavoro che la forza del campo compie quando la carica di prova si sposta dal punto considerato fino all'infinito lungo una qualsiasi traiettoria.

Come nel caso gravitazionale, anche per l’energia potenziale elettrica la convenzione più comune nella scelta del livello zero, consiste nel porre U(r)=0 quando le due cariche sono poste a distanza infinita.

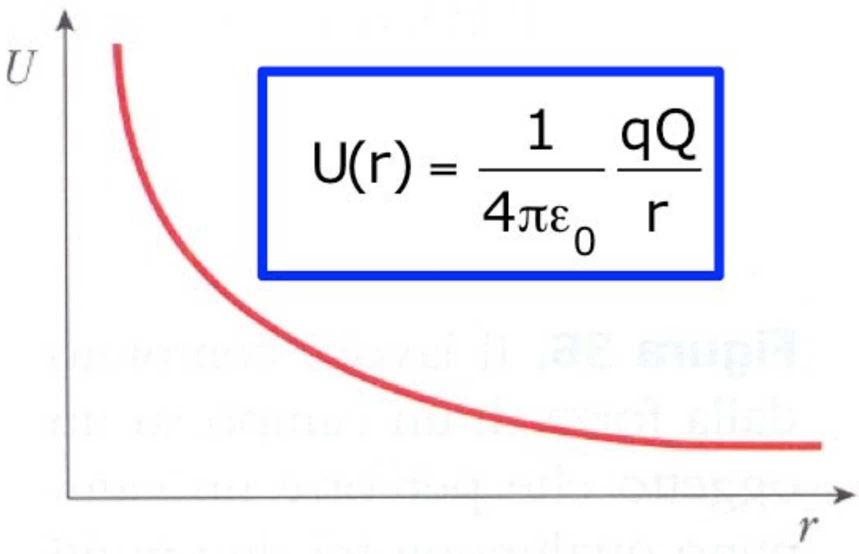


Grafico dell'energia potenziale elettrica in funzione di *r* nel caso in cui le due cariche *q* e Q siano di segno concorde.

Al diminuire della distanza, l'energia potenziale elettrica aumenta, perché per avvicinare le cariche occorre spendere lavoro contro le forze del campo.

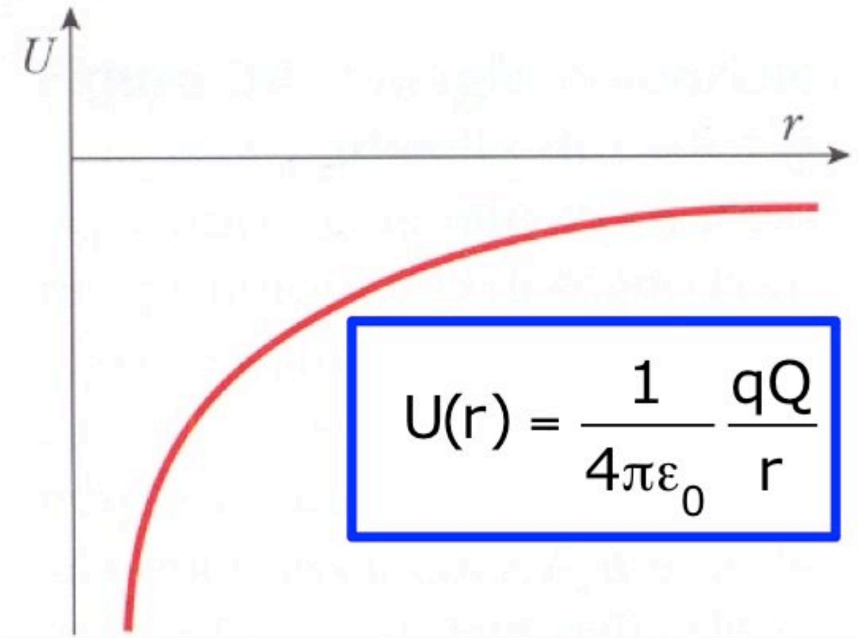
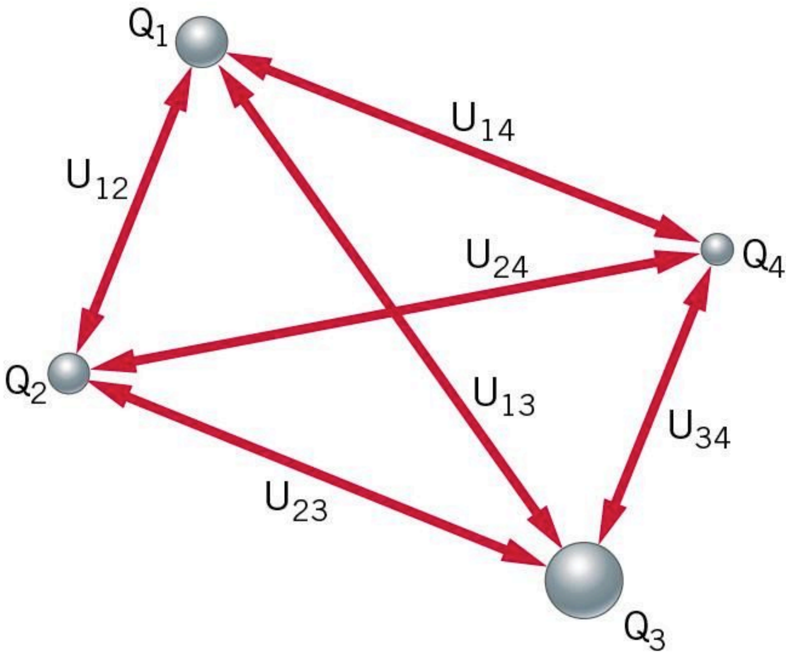


Grafico dell'energia potenziale elettrica quando le due cariche sono discordi.

L'energia potenziale elettrica è negativa e aumenta, tendendo a zero, all'aumentare di *r*. Infatti la forza elettrica è attrattiva e, dall'esterno, si spende lavoro per allontanare le cariche.

Nel caso di più cariche puntiformi, si ha:



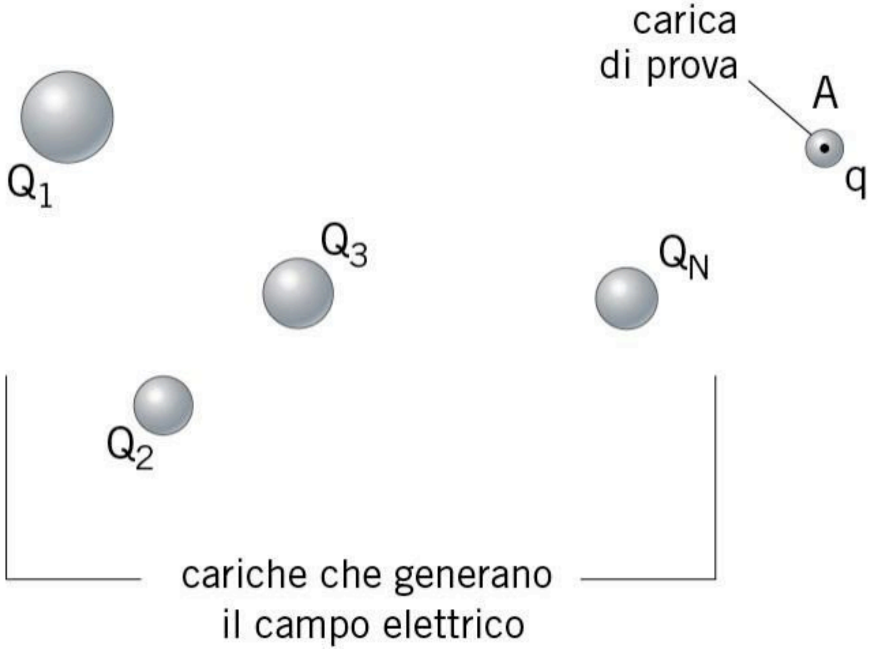
L'energia potenziale elettrica del sistema di cariche è data dalla somma algebrica delle energie potenziali elettriche che si ottengono scegliendo le cariche a coppie in tutti i modi possibili.

Nell'esempio illustrato, otteniamo:

$$\boxed{U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}}$$

I sei contributi sono alcuni positivi, altri negativi, a seconda dei segni delle cariche.

POTENZIALE ELETTRICO



L'energia potenziale elettrica in A del sistema di cariche è direttamente proporzionale alla carica di prova q in quel punto.

Così come abbiamo fatto per il campo elettrico (dove abbiamo definito il vettore **E** che dipende dalle cariche ma non dalla carica di prova), definiamo una nuova grandezza, in questo caso scalare, *il potenziale elettrico o tensione*, indipendente dalla carica di prova *q*.

potenziale elettrico

Il potenziale elettrico nel punto A è uguale al rapporto tra l'energia potenziale U_A, dovuta all'interazione delle cariche che generano il campo con la carica di prova q posta in A, e la stessa carica di prova q:

potenziale elettrico (J/C o V)

energia potenziale elettrica (J)

$$V_A = \frac{U_A}{q}$$

carica di prova (C)

Come vedremo tra poco: il potenziale elettrico V_A è indipendente dalla presenza della carica di prova q in A e dipende solo dalle cariche che generano il campo elettrico e dal punto A.

La grandezza veramente significativa, dal punto di vista fisico, è la differenza di potenziale elettrico fra due punti:

differenza di potenziale elettrico

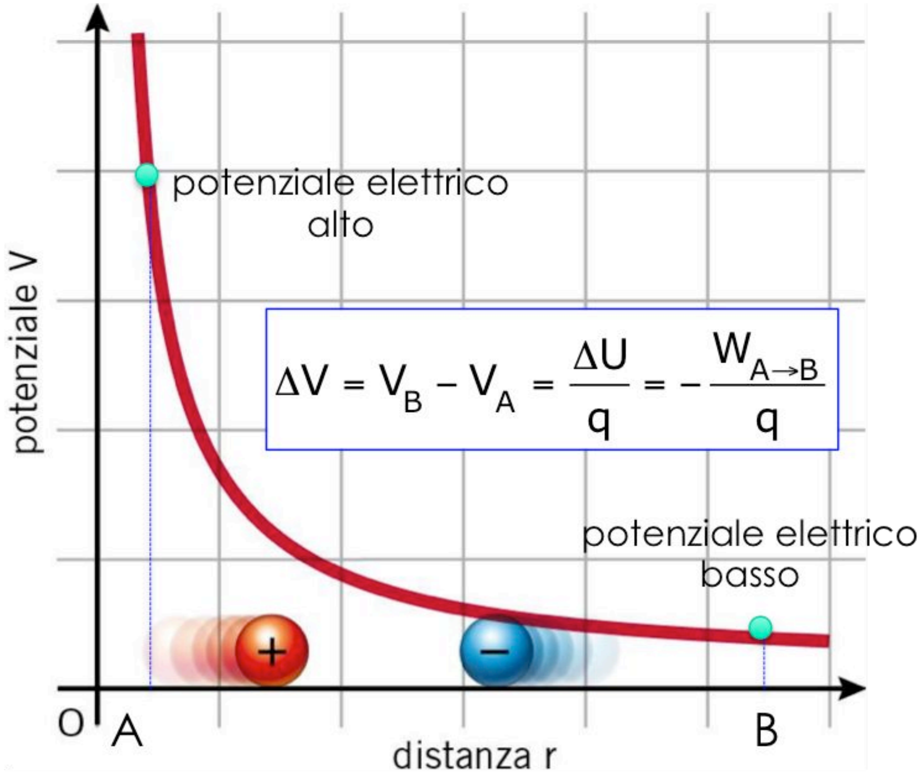
La differenza di potenziale V_A-V_B fra due punti *A* e *B* in un campo elettrico è il rapporto fra il lavoro compiuto dalla forza del campo su una carica di prova *q* quando questa si sposta da *A* a *B* e la carica *q* stessa:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_{A\rightarrow B}}{q} \quad \left[\mathrm{volt} = \mathrm{V} \right]$$

definizione di volt: tra due punti c'è una differenza di potenziale di 1V quando, spostando una carica di 1C da un punto all'altro, l'energia potenziale cambia di 1J.

In funzione del volt possiamo definire una nuova unità di misura del lavoro, usata soprattutto nei problemi di fisica atomica, **l'elettronvolt** (eV): 1eV è, in valore assoluto, il lavoro compiuto dalla forza del campo elettrico su un elettrone che si sposta da un punto *A* a un punto *B* fra i quali esista una differenza di potenziale (d.d.p.) di 1 V:

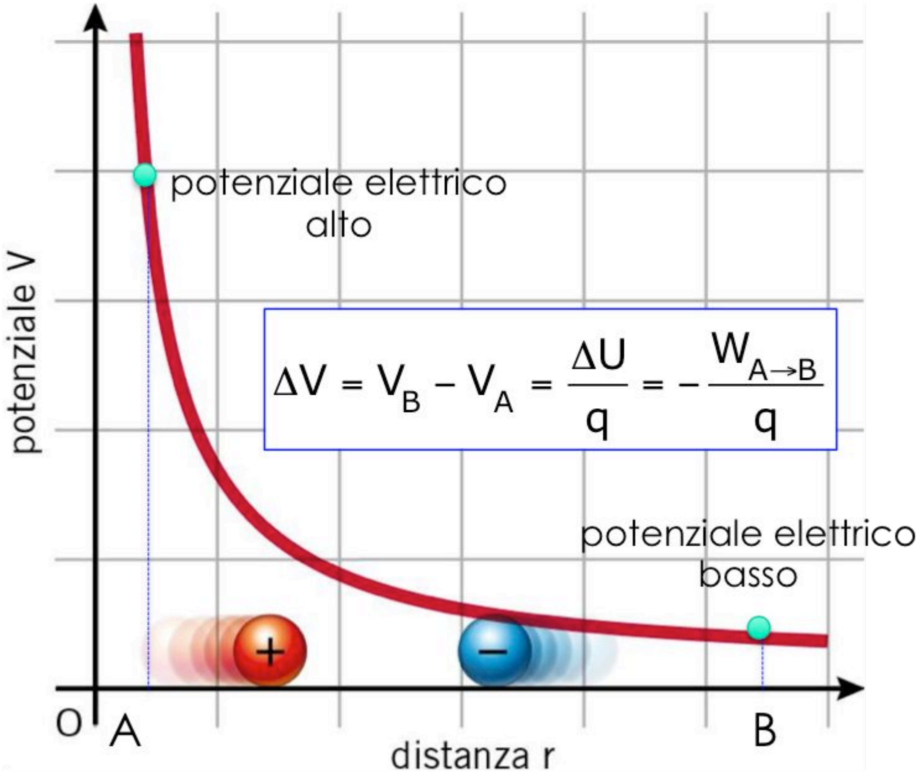
$$L = e\Delta V = 1{,}602 \cdot 10^{-19} C \cdot 1V = 1{,}602 \cdot 10^{-19} eV$$



Se la forza elettrica compie un lavoro positivo ($W_{A\rightarrow B}$>0) mentre la carica positiva q si sposta da A verso B, questo spostamento può avvenire spontaneamente.

Infatti, la differenza di potenziale $\Delta V = V_B - V_A$ è negativa, ($V_A > V_B$) :

il moto naturale delle cariche positive è da punti a potenziale maggiore verso punti a potenziale minore.



Per le cariche negative vale la proprietà opposta: il lavoro $W_{A\to B}$ è positivo quando la differenza di potenziale è positiva.

il moto naturale delle cariche negative è da punti a potenziale minore verso punti a potenziale maggiore.

Potenziale elettrico carica puntiforme

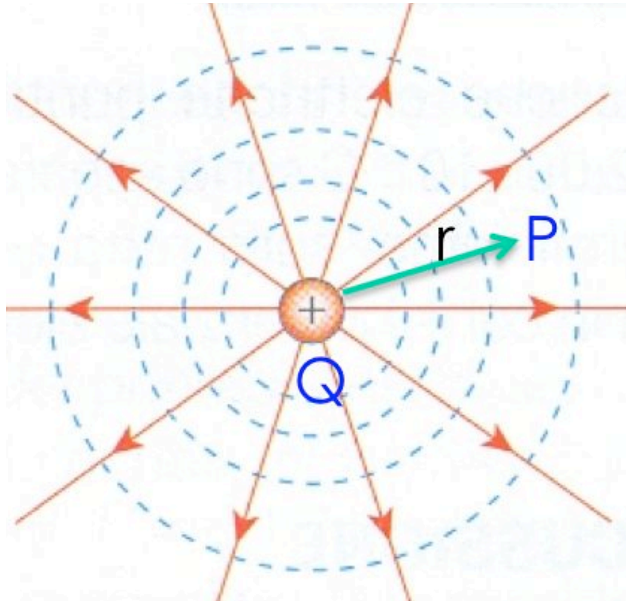
Tenendo presente l'espressione dell'energia potenziale:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qQ}{r}$$

e la definizione di potenziale elettrico:

$$V(r) = \frac{U(r)}{q}$$

si ottiene:



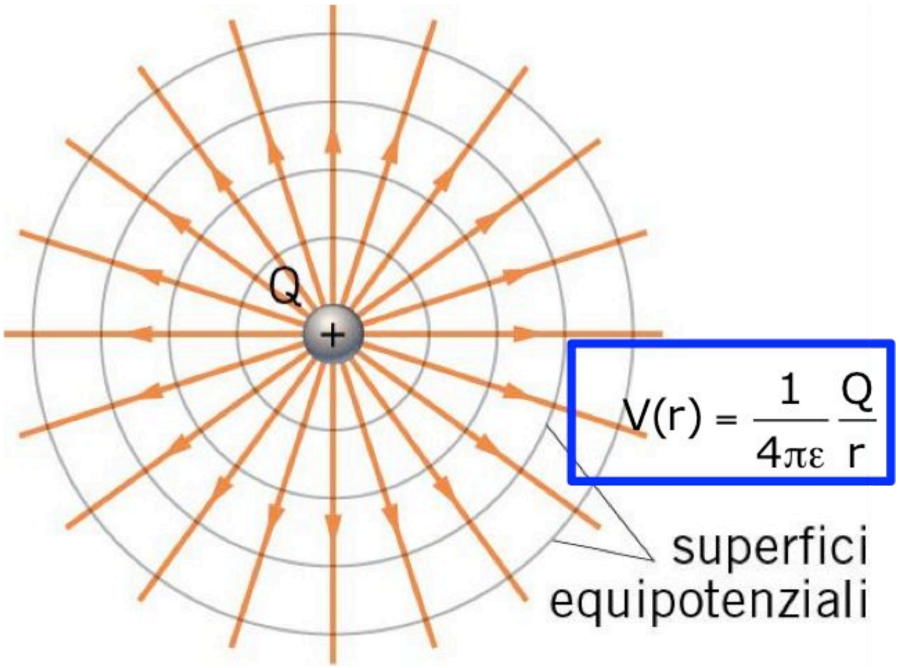
Il potenziale elettrico generato da una carica puntiforme Q in un punto P a distanza r da essa:

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}}$$

Il potenziale elettrico è positivo o negativo a seconda del segno della carica ed è nullo nei punti che sono infinitamente distanti da Q.

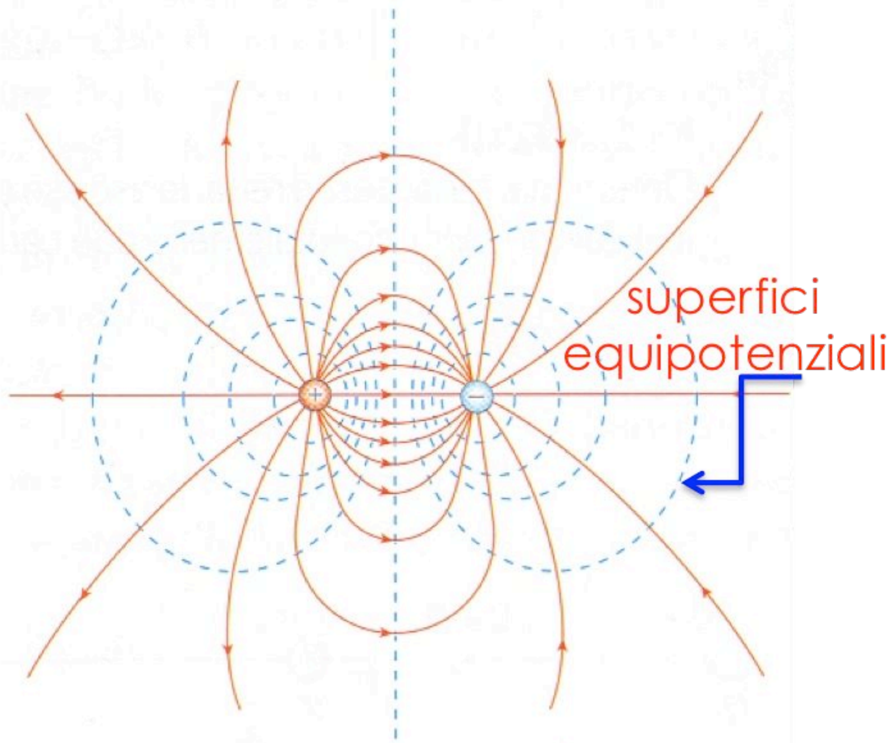
Principio di sovrapposizione - Se il campo elettrico è generato da più cariche, il potenziale elettrico nel punto P è la somma algebrica dei potenziali che si misurerebbero in P se ciascuna delle cariche che generano il campo fosse presente da sola.

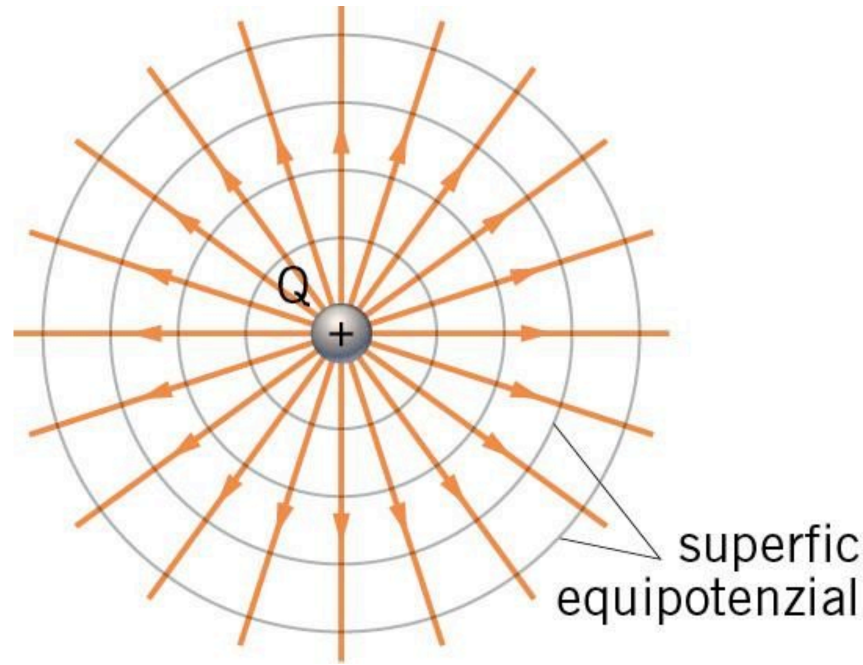
SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



Il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti equidistanti dalla carica Q, cioè su tutte le superfici sferiche aventi il centro nel punto in cui è localizzata la carica.

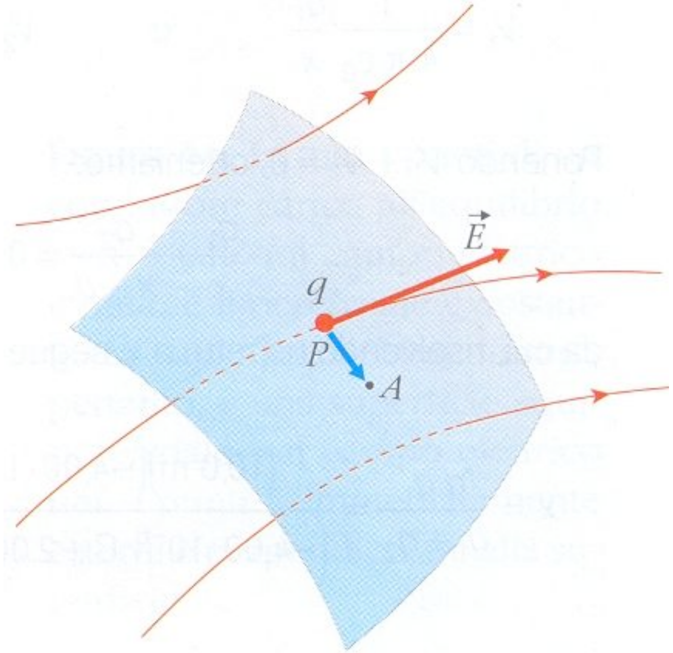
Tali superfici (che possono avere forma qualsiasi) sono dette **superfici equipotenziali**, poiché su ciascuna di esse tutti i punti sono caratterizzati dallo stesso valore del potenziale elettrico.





In figura sono rappresentate le linee di forza e le superfici equipotenziali del campo elettrico generato da una e da due cariche. Dall'esame della figura si vede che:

le linee di forza sono perpendicolari in ogni punto alla superficie equipotenziale passante per quel punto. Tale proprietà è valida in generale.



Infatti, il lavoro compiuto dalla forza elettrica per spostare una carica *q* da un punto *P* a un altro punto *A* sulla superficie equipotenziale passante per *P* è:

$$L = q(V_P - V_A)$$

Essendo $V_P=V_A$, è anche L=0, cioè la forza elettrica, e quindi anche il campo elettrico E nel punto P, è perpendicolare allo spostamento (cos90°=0 e quindi L=0).

RELAZIONE TRA POTENZIALE E CAMPO ELETTRICO

Abbiamo visto che se conosciamo il campo elettrico **E** (e quindi la forza **F**=q**E** che agisce su una carica di prova q) possiamo calcolare il potenziale elettrico in una certa zona di spazio.

Vogliamo adesso mostrare che:

è possibile calcolare il campo elettrico in un punto dello spazio se si conosce l'andamento del potenziale elettrico nei dintorni di quel punto (e viceversa).

$$\boxed{E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \quad \left[\frac{V}{m}\right]}$$

Il modulo E del vettore campo elettrico è positivo perché si è scelta una differenza di potenziale ΔV che è negativa.

In definitiva: conoscendo il campo elettrico è possibile calcolare il potenziale e, al contrario, conoscendo il potenziale è possibile calcolare il campo elettrico.

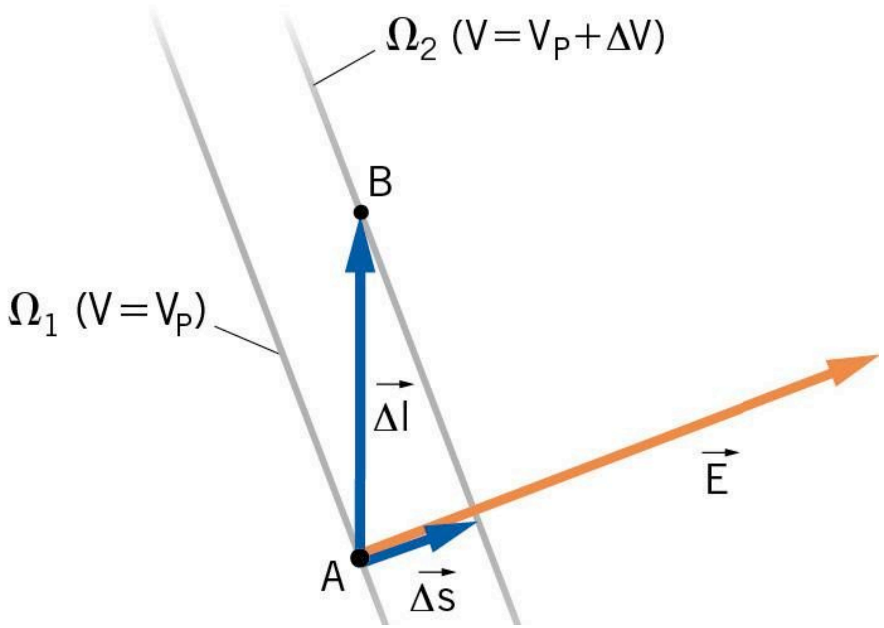
Le due descrizioni della realtà fisica, basate sull’uso di queste due quantità (una vettoriale e l’altra scalare), sono equivalenti tra loro.

dimostrazione della relazione

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$$

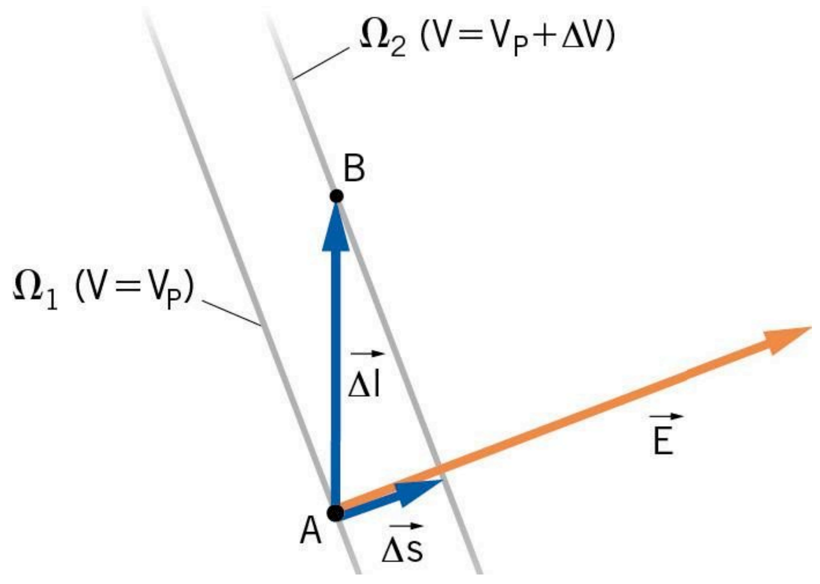
Consideriamo una zona di spazio abbastanza piccola da potere considerare uniforme il campo elettrico al suo interno.

In essa prendiamo un punto A, in cui il potenziale vale V_A, e la superficie equipotenziale Ω_1 che contiene A.



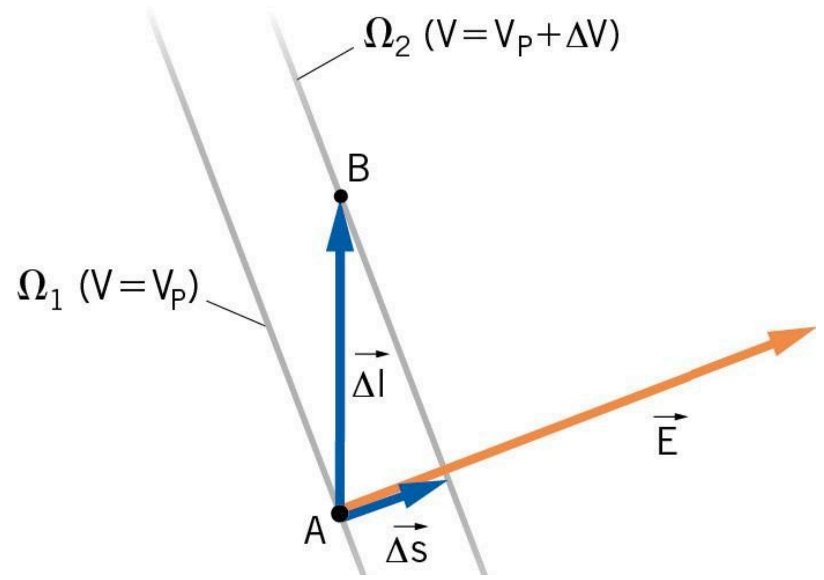
Poiché il campo elettrico è uniforme, le superfici equipotenziali appaiono piane e parallele tra loro.

Ciò ci permette di determinare la direzione e il verso del vettore campo elettrico **E** nel punto A. Infatti, la direzione di **E** è quella perpendicolare alle superfici equipotenziali e il suo verso punta nel senso in cui il potenziale diminuisce.



Per determinare l'intensità di **E**, consideriamo una seconda superficie equipotenziale su cui il potenziale elettrico vale $V_A + \Delta V$, dove ΔV è una differenza di potenziale infinitesima e negativa.

Così Ω_2 si trova, rispetto a Ω_1, dalla parte in cui punta **E**, a una distanza Δ **s** da Ω_1.



ΔV è una quantità nota, dal momento che abbiamo fatto l'ipotesi di conoscere l'andamento del potenziale elettrico nei dintorni di A.

Ora spostiamo una carica di prova positiva q dal punto A a un punto B di Ω_2.

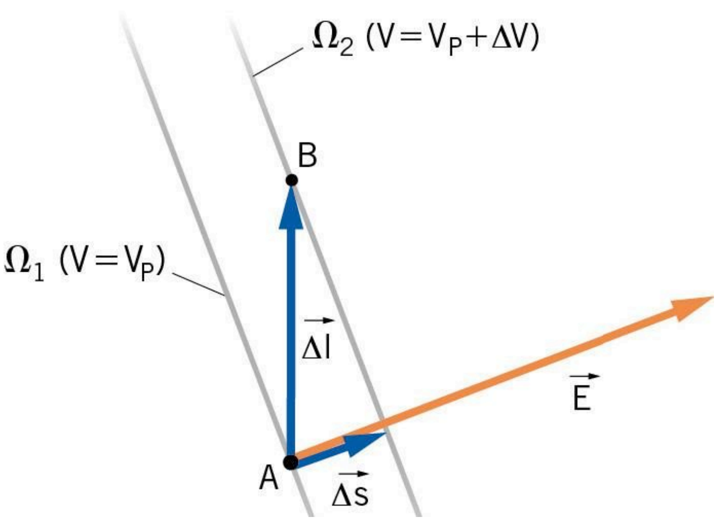
Il punto A appartiene alla superficie potenziale Ω_1; il punto B a Ω_2, a cui corrisponde un potenziale leggermente minore rispetto a $\Omega 1$.

Il lavoro $W_{A\to B}$ fatto dalla forza elettrica **F** durante tale spostamento **Δl** è:

$$W_{A\to B} = \vec{F} \bullet \Delta\vec{l} = q\vec{E} \bullet \Delta\vec{l}$$

La definizione di differenza di potenziale, ci permette di scrivere:

$$\Delta V = -\frac{W_{A\to B}}{q} = -\frac{q\vec{E} \bullet \Delta\vec{l}}{q} = -\vec{E} \bullet \Delta\vec{l}$$



Dalla figura notiamo che la proiezione **Δl**$_{//}$ del vettore **Δl** sul **E** non è altro che la distanza tra le due superfici equipotenziali:

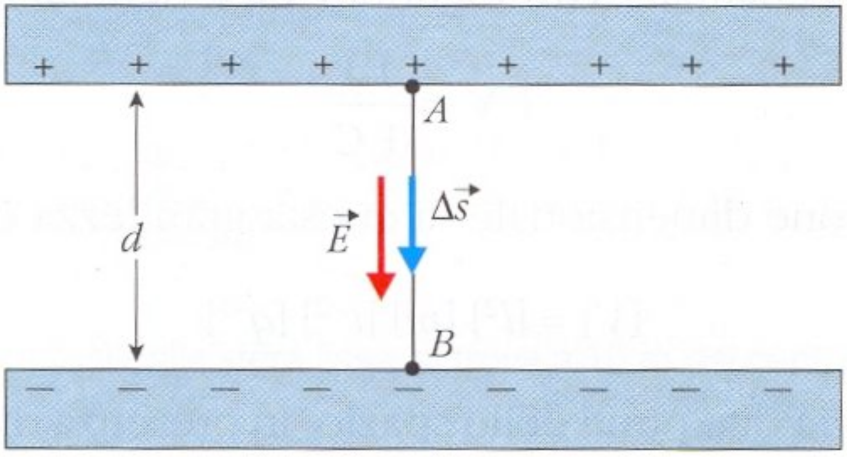
$$\Delta\vec{l}_{//} = \Delta\vec{s}$$

Possiamo quindi scrivere: $\vec{E} \bullet \Delta\vec{l} = E\Delta l_{//} = E\Delta s$

Allora si ottiene:

$$\boxed{\Delta V = -\vec{E} \bullet \Delta\vec{l} = -E\Delta s \xrightarrow[\text{dimostrare}]{\text{come volevasi}} E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}}$$

Esempio: condensatore piano



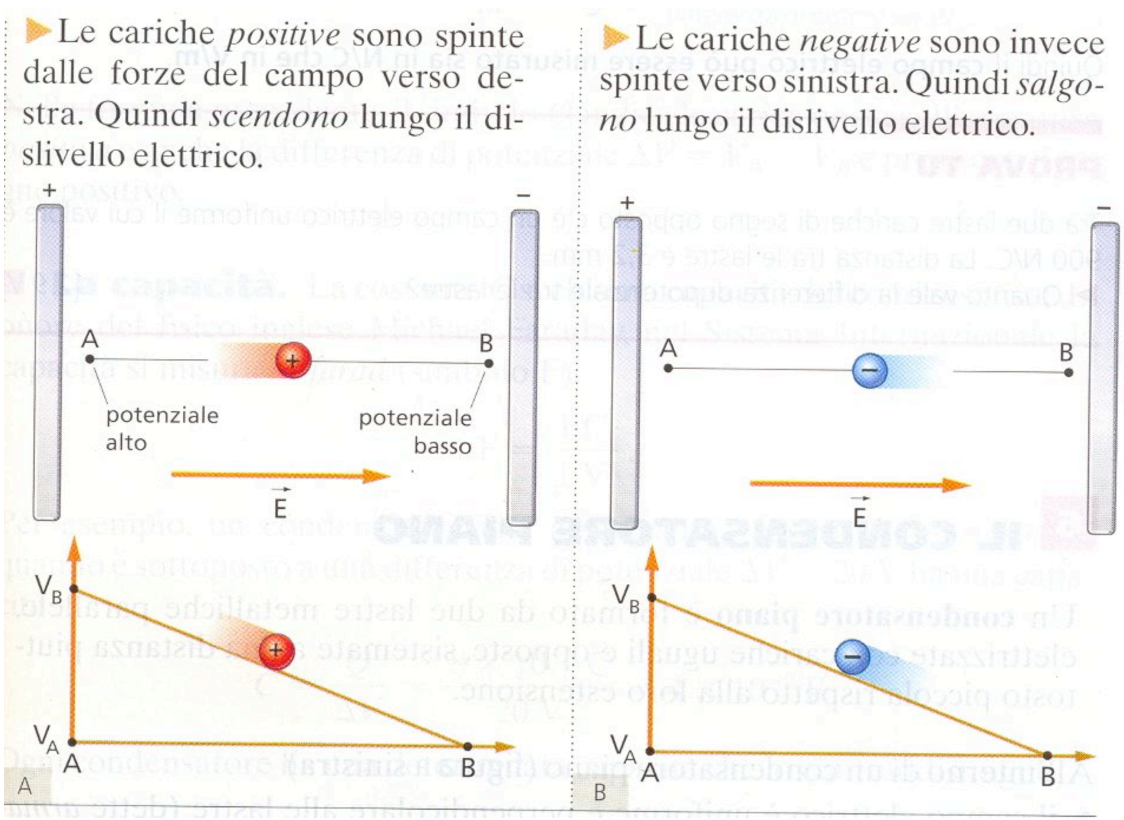
Se *E* è il modulo del campo elettrico e *d* la distanza fra le piastre del condensatore, indicando con *A* e con *B* due punti posti rispettivamente sulla piastra positiva e su quella negativa, otteniamo:

$$V_A - V_B = Ed$$

Tale formula la possiamo utilizzare per calcolare il campo elettrico all'interno di un condensatore:

$$\boxed{E = \frac{V_A - V_B}{d}}$$

Tra i punti *A* e *B* c'è un dislivello elettrico misurato dalla differenza di potenziale: A si trova a un potenziale più alto, *B* a uno più basso.



In generale:

- Le cariche positive scendono lungo una differenza di potenziale, cioè si spostano da dove il potenziale è alto verso punti in cui è più basso.
- Le cariche negative salgono lungo una differenza di potenziale, cioè si spostano da dove il potenziale è basso verso punti in cui è più alto.

CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO

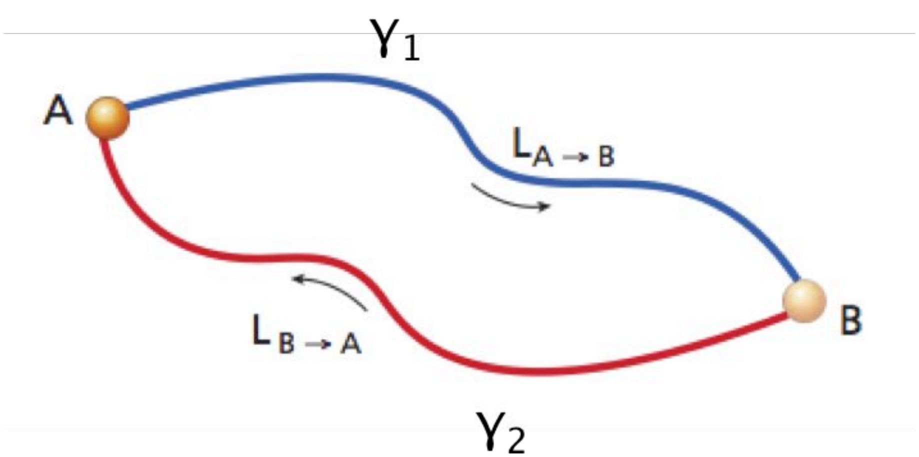
Un modo alternativo per dire che il campo elettrico è conservativo è il seguente:

Il lavoro compiuto dal campo elettrico sulla carica di prova q che si muove lungo una traiettoria chiusa è nullo.

In termini matematici:

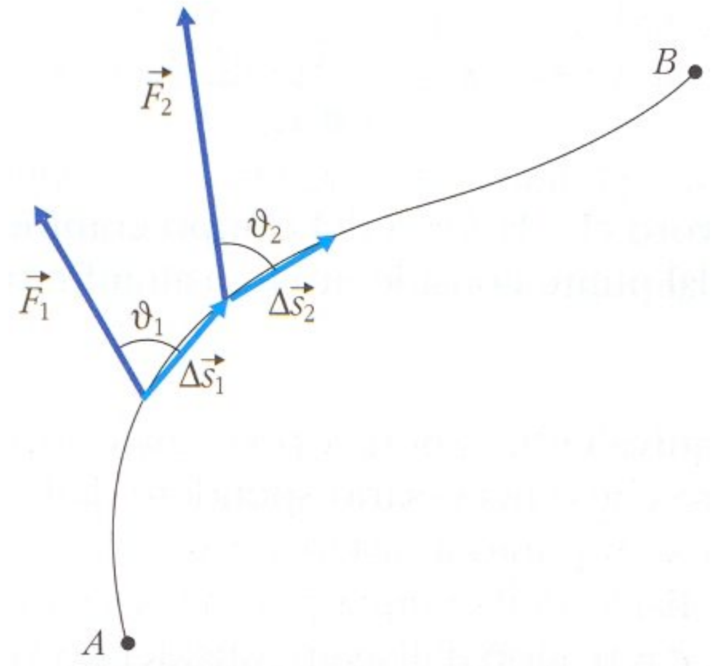
$$L_{AB} = -L_{BA} \Rightarrow L_{AB} + L_{BA} = 0$$

$$L = \oint_{\gamma_1+\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



Formalizziamo questa proprietà.

Il lavoro compiuto da un campo elettrico su un oggetto che percorre un cammino qualunque fra due punti A e B è:

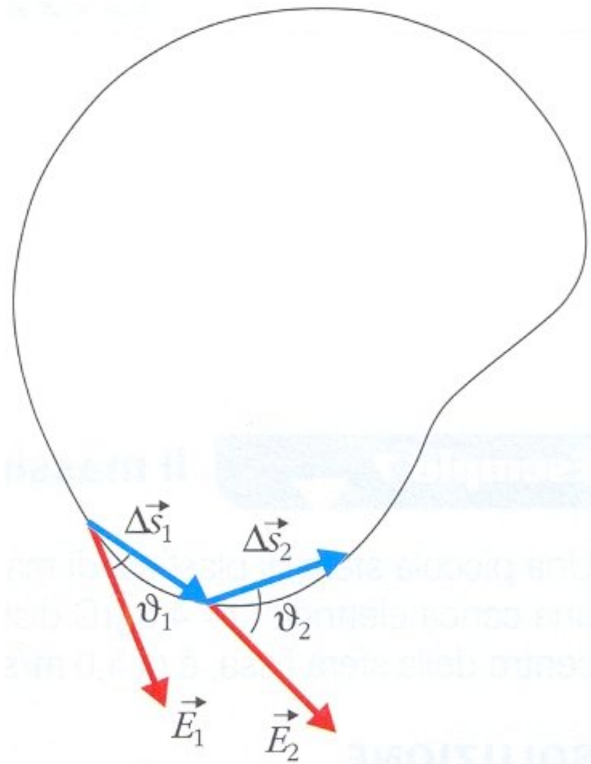


la somma dei lavori compiuti durante gli spostamenti infinitesimi $\Delta\mathbf{s}_1$, $\Delta\mathbf{s}_2$, … in cui si può suddividere il cammino e con i quali i vettori forza $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, … formano gli angoli ϑ_1, ϑ_2, …:

(1) $$L = \vec{F}_1 \bullet \Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \bullet \Delta\vec{s}_2 + \ldots =$$

$$F_1\Delta s_1 \cos\vartheta_1 + F_2\Delta s_2 \cos\vartheta_2 + \ldots = q\vec{E}_1 \bullet \Delta\vec{s}_1 + q\vec{E}_2 \bullet \Delta\vec{s}_2 + \ldots$$

Se la somma dei termini al secondo membro della (1) è estesa ad un percorso chiuso otteniamo una quantità che prende il nome di **circuitazione del campo elettrico**:



$$\boxed{C(\vec{E}) = \Sigma q\vec{E}\bullet\Delta\vec{s}}$$

Ma il lavoro elettrico è nullo su un percorso chiuso, per cui:

La circuitazione del campo elettrico lungo qualsiasi cammino chiuso è nulla:

$$\boxed{C(\vec{E}) = 0}$$

Questa equazione caratterizza la conservatività del campo elettrico. La circuitazione può essere calcolata per qualsiasi campo vettoriale e su qualsiasi linea chiusa.

Avere introdotto questa grandezza ci permette di definire in termini generali un campo conservativo:

Un campo vettoriale è conservativo se e solo se la sua circuitazione è nulla su ogni linea chiusa.

$$\boxed{C(\vec{E}) = 0}$$

PROPRIETA' MATEMATICHE DEL CAMPO CONSERVATIVO

Un campo vettoriale, e quindi il campo elettrico, è completamente determinato quando se ne conoscono il flusso e la circuitazione:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon}$$

$$C(\vec{E}) = 0$$

Attenzione: tutto ciò che abbiamo detto è valido nel caso in cui tutte le cariche presenti siano in equilibrio elettrostatico (campo elettrostatico).

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEL CAMPO ELETTRICO

Poiché la forza elettrica è conservativa, una particella di massa *m* e carica *q* in moto in un campo elettrico mantiene costante la sua energia totale. Se essa è soggetta solo alla forza elettrica, la somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale elettrica si conserva:

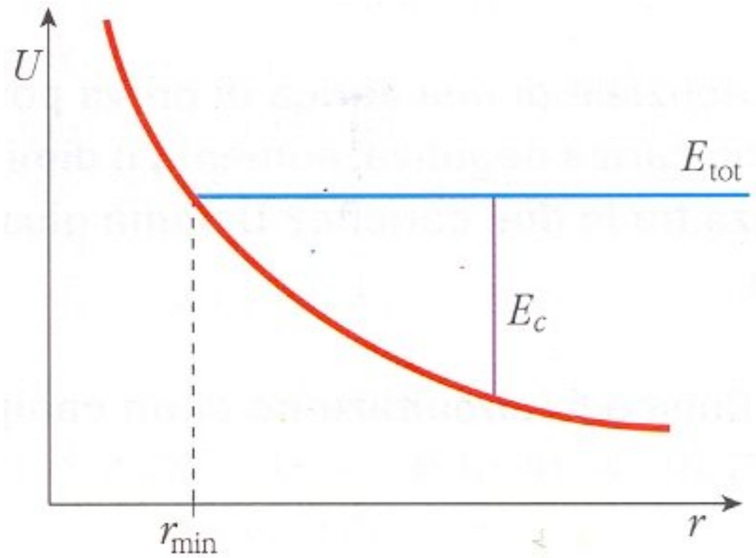
$$\boxed{E_{tot} = E_c + U = costante}$$

Nel caso in cui risenta contemporaneamente di altre forze conservative, nella somma delle energie devono essere incluse anche le forme di energia potenziale associate a queste forze.

Supponiamo che la particella carica sia in moto nel campo elettrico generato da una carica puntiforme Q. Il principio di conservazione dell'energia si esprime allora con la relazione:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r} = \cos\tan te$$



Nel caso in cui Q e q siano di segno concorde, è indicato un certo valore E_{tot} dell'energia totale.

Alla particella carica sono accessibili tutti i punti dello spazio nei quali l'energia totale superi l'energia potenziale elettrica, infatti: $E_{tot}-U=E_c$, dove $E_c \geq 0$.

Se la particella si avvicina alla carica Q partendo dall'infinito, U aumenta e E_C diminuisce. Di conseguenza la particella rallenta progressivamente fino alla distanza r_{min}, dove $U=E_{tot}$ e la velocità si annulla. Raggiunta tale posizione, inverte il suo moto e si allontana con velocità crescente.